

3.4.14 Objem válce

Předpoklady: 030413

Př. 1: Které veličiny určují objem válce? Jaké vlastnosti musí vzorec pro objem válce splňovat? Navrhni vzorec pro objem válce.

Objem válce je dán:

- poloměrem podstavy r (větší průměr znamená větší objem),
- výškou válce v (větší výška znamená větší objem).

Vzorec pro objem válce musí obsahovat:

- poloměr r a výšku válce v (rozhodují o velikosti),
- dohromady třetí mocninu délek (objem je vždy třetí mocnina délky) $\Rightarrow$ výška v nebo poloměr r budou v druhé mocnině,
- číslo π (jde o těleso spojené s kruhem)

Vzorec pro objem hranolu: $V = S_p \cdot v$.

Pro válec stejná situace, $S = \pi r^2$ (obsah kruhu) $\Rightarrow$
objem válce: $V = \pi r^2 v$ (splňuje všechny požadavky).

Objem válce určíme pomocí vzorce $V = \pi r^2 v$, kde r je poloměr podstavy a v je jeho výška.

Př. 2: Urči objem své tužky v mm^3 bez ořezané části. Pokud nemáš tužku válcového tvaru, spočti objem válce, do kterého by se tvá tužka vešla.

Potřebné rozměry:

- průměr 7 mm $\Rightarrow$ poloměr: 3,5 mm,
- délka tužky: 12,3 cm = 123 mm.

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 3,5^2 \cdot 123 \text{ mm}^3 = 4\,734 \text{ mm}^3$$

Objem tužky bez ořezané části je 4 734 mm^3 .

Př. 3: Franta se rozhodl do své nové hospody nechat vyrobit vysoké sklenice na limonádu. Sklenice mají mít válcový tvar o průměru 5 cm. Jak musí být vysoké, pokud mají mít objem 0,5 l?

Objem: $V = 0,5 \text{ l} = 0,5 \text{ dm}^3 = 500 \text{ cm}^3$, $d = 5 \text{ cm} \Rightarrow r = 2,5 \text{ cm}$

Známe objem, neznáme výšku $\Rightarrow$ ze vzorce vyjádříme výšku a spočteme ji.

$$V = \pi r^2 \cdot v \quad / : \pi r^2$$

$$v = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{500}{\pi \cdot 2,5^2} \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

Sklenice budou muset být vysoké (po míru) 25 cm (ve skutečnosti tedy budou ještě o něco vyšší).

Př. 4: V továrně na výrobu umělých hnojiv je třeba postavit jímku na odpadní vody válcového tvaru o objemu 53 m^3 . Jaký musí být průměr jímky aby byla dodržena výška $1,5 \text{ m}$?

Objem: $V = 53 \text{ m}^3$, $v = 1,5 \text{ m}$

Známe objem, neznáme poloměr $\Rightarrow$ ze vzorce vyjádříme poloměr a spočteme ho.

$$V = \pi r^2 \cdot v \quad / : \pi v$$

$$r^2 = \frac{V}{\pi v} \quad / \sqrt{}$$

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi v}} = \sqrt{\frac{53}{\pi \cdot 1,5}} \text{ m} = 3,35 \text{ m} \Rightarrow d = 6,7 \text{ m}$$

Je nutné postavit jímku o průměru $6,7 \text{ m}$.

Př. 5: Který z válců, jejichž plášť můžeme stočit z papíru formátu A4, má větší objem? Bude objem některého z válců větší než 1 litr ? Výsledek nejprve odhadni a pak ověř výpočtem.

Papír formátu A4 má rozměru $210 \times 297 \text{ mm}$. Plášť válce můžeme z papíru stočit dvěma způsoby:

- strana o délce 210 představuje výšku válce, strana o délce 297 představuje obvod podstavy,
- strana o délce 297 představuje výšku válce, strana o délce 210 představuje obvod podstavy.

V obou případech můžeme z obvodu vypočítat poloměr podstavy a z něj objem válce. Větší objem získáme v případě, že delší stranu 297 mm přeložíme tak, aby tvořila obvod podstavy (pak získáme větší poloměr, který je ve vzorci pro objem ve druhé mocnině).

Strana o délce 210 představuje výšku válce, strana o délce 297 představuje obvod podstavy.

$$o = 2\pi r \quad / : 2\pi$$

$$r = \frac{o}{2\pi} = \frac{297}{2\pi} \text{ mm} = 47,3 \text{ mm}$$

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 47,3^2 \cdot 210 \text{ mm}^3 = 1\,480\,000 \text{ mm}^3$$

Strana o délce 297 představuje výšku válce, strana o délce 210 představuje obvod podstavy.

$$r = \frac{o}{2\pi} = \frac{210}{2\pi} \text{ mm} = 33,4 \text{ mm}$$

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 33,4^2 \cdot 297 \text{ mm}^3 = 1\,040\,000 \text{ mm}^3$$

Platí $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000\,000 \text{ mm}^3 \Rightarrow$ v obou případech je objem vzniklého válce větší než 1 litr .

Větší objem $1\,480\,000 \text{ mm}^3$ má válec, který vznikne tak, že složením bude delší strana papíru představovat obvod podstavy.

Dodatek: Příklad je možné řešit i bez mezi výpočtů, takže si odvodíme vzorec pro objem z výšky a obvodu podstavy.

Vzorec pro obvod kruhu: $o = 2\pi r \quad / : 2\pi$

$$r = \frac{o}{2\pi}$$

Dosadíme do vzorce pro objem válce: $V = \pi r^2 v = \pi \cdot \left(\frac{o}{2\pi}\right)^2 v = \pi \cdot \frac{o^2}{4\pi^2} v = \frac{o^2 v}{4\pi}$.

Nyní můžeme do odvozeného vzorce dosazovat přímo hodnoty ze zadání:

$$V = \frac{o^2 v}{4\pi} = \frac{210^2 \cdot 297}{4\pi} = 1\,040\,000 \text{ mm}^3$$

$$V = \frac{o^2 v}{4\pi} = \frac{297^2 \cdot 210}{4\pi} = 1\,470\,000 \text{ mm}^3$$

Př. 6: Filip chytá na zahradě vodu ze střechy o ploše 25 m^2 do tří zahradních sudů o výšce 120 cm a průměru 70 cm. Kolik mm vody napršelo při bouřce, která naplnila zcela prázdné sudy ze čtyř pětín?

Průměr sudu: $d = 70 \text{ cm} \Rightarrow r = 35 \text{ cm} = 0,35 \text{ m}$.

Objem jednoho sudu: $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 0,35^2 \cdot 1,2 \text{ m}^3 = 0,46 \text{ m}^3$.

Objem všech sudů: $3 \cdot 0,46 \text{ m}^3 = 1,38 \text{ m}^3$.

Objem zachycené vody: $\frac{4}{5} \cdot 1,38 \text{ m}^3 = 1,104 \text{ m}^3$.

Napršená voda by mohla vytvořit kvádr, jehož výška odpovídá počtu mm napršené vody a podstava ploše střechy.

$V = S \cdot v \quad / : S$

$$v = \frac{V}{S} = \frac{1,104}{25} \text{ m} = 0,044 \text{ m} = 44 \text{ mm}$$

Při bouřce napršelo 44 mm srážek.

Př. 7: Jarda si nechal postavit koupelnu na druhé straně domu, než je boiler na ohřívání vody. Teď se diví, že si vždy před umytím musí odpustit studenou vodu. Kde se stala chyba? Kolik vody musí odpustit, než začne z kohoutku téct teplá voda z boileru? Potřebné veličiny odhadni.

Teplá voda musí od boileru do koupelny přivádět trubka. Voda v trubce zůstává a chladne $\Rightarrow$ před umytím je třeba vypustit všechnu vodu v trubce $\Rightarrow$ potřebujeme odhadnout objem trubky.

Délka trubky: 15 m

Průměr trubky: 2 cm $\Rightarrow$ poloměr 1 cm.

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 1^2 \cdot 1500 \text{ cm}^3 = 4\,700 \text{ cm}^3 \doteq 5 \text{ l}$$

Jarda musí před umytím odpustit přibližně 5 litrů vody.

Shrnutí: Objem válce určíme pomocí vzorce $V = \pi r^2 v$, kde r je poloměr podstavy a v je jeho výška.